

# Sistemas de ecuaciones

Dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

La solución de un sistema es un par de números  $x_1, y_1$ , tales que reemplazando  $x$  por  $x_1$  e  $y$  por  $y_1$ , se satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \quad x = 2, y = 3$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 6 - 12 = -6 & -6 = -6 \\ 4 + 12 = 16 & 16 = 16 \end{cases}$$

## Criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones

**1º** Si a **ambos miembros** de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una **misma expresión**, el sistema resultante es **equivalente**.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y + 3 = -6 + 3 \\ x + 2y - 5y = 8 - 5y \end{cases} \quad x = 2, y = 3$$

**2º** Si **multiplicamos o dividimos ambos miembros** de las ecuaciones de un sistema **por un número distinto de cero**, el sistema resultante es **equivalente**.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \cdot (3x - 4y) = -6 \cdot 3 \\ \frac{2x + 4y}{2} = \frac{16}{2} \end{cases} \quad x = 2, y = 3$$

**3º** Si **sumamos o restamos a una ecuación** de un sistema otra ecuación **del mismo sistema**, el sistema resultante es **equivalente** al dado.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y + 3x - 4y = 16 - 6 \end{cases} \quad x = 2, y = 3$$

**4º** Si en un sistema se **sustituye una ecuación por otra** que resulte de **sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos**, resulta otro sistema **equivalente al primero**.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ \frac{2x + 4y}{2} = \frac{16}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + x + 2y = -6 + 8 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \quad x = 2, \quad y = 3$$

5° Si en un sistema se **cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas**, resulta otro **sistema equivalente**.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \quad x = 2, \quad y = 3$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} -4y + 3x = -6 \\ 4y + 2x = 16 \end{cases} \quad x = 2, \quad y = 3$$

## Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones

### Método de reducción

- 1 Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.
- 2 La restamos, y desaparece una de las incógnitas.
- 3 Se resuelve la ecuación resultante.
- 4 El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
- 5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Lo más fácil es suprimir la  $y$ , de este modo no tendríamos que preparar las ecuaciones; pero vamos a optar por suprimir la  $x$ , para que veamos mejor el proceso.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 & \xrightarrow{\cdot 2} & 6x - 8y = -12 \\ 2x + 4y = 16 & \xrightarrow{\cdot (-3)} & -6x - 12y = -48 \end{cases}$$

Restamos y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} \cancel{6x} - 8y = -12 \\ \cancel{-6x} - 12y = -48 \\ \hline -20y = -60 \end{cases} \quad y = 3$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación inicial.

$$2x + 4 \cdot 3 = 16 \quad 2x + 12 = 16 \quad 2x = 4 \quad x = 2$$

Solución:

$$x = 2, y = 3$$

## Método de sustitución

**1** Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

**2** Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo un ecuación con una sola incógnita.

**3** Se resuelve la ecuación.

**4** El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

**5** Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

**1 Despejamos** una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$$2x = 16 - 4y \quad x = 8 - 2y$$

**2 Sustituimos** en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$$3(8 - 2y) - 4y = -6$$

**3 Resolvemos la ecuación** obtenida:

$$24 - 6y - 4y = -6 \quad -10y = -30 \quad y = 3$$

## Método de igualación

**1** Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

**2** Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

**3** Se resuelve la ecuación.

**4** El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

**5** Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

**1 Despejamos**, por ejemplo, la incógnita  $x$  de la primera y segunda ecuación:

$$3x = -6 + 4y \quad x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x = 16 - 4y \quad x = \frac{16 - 4y}{2}$$

**2 Igualamos** ambas expresiones:

$$\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 - 4y}{2}$$

**3 Resolvemos** la ecuación:

$$2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y) \quad -12 + 8y = 48 - 12y$$

$$8y + 12y = 48 + 12 \quad 20y = 60 \quad y = 3$$

**4 Sustituimos** el valor de  $y$ , en una de las dos **expresiones** en las que tenemos **despejada la  $x$** :

$$x = \frac{-6 + 4 \cdot 3}{3} = \frac{-6 + 12}{3} \quad x = 2$$

**5 Solución:**

$$x = 2, y = 3$$

**4 Sustituimos el valor** obtenido en la variable despejada.

$$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 \quad x = 2$$

**5 Solución**

$$x = 2, y = 3$$

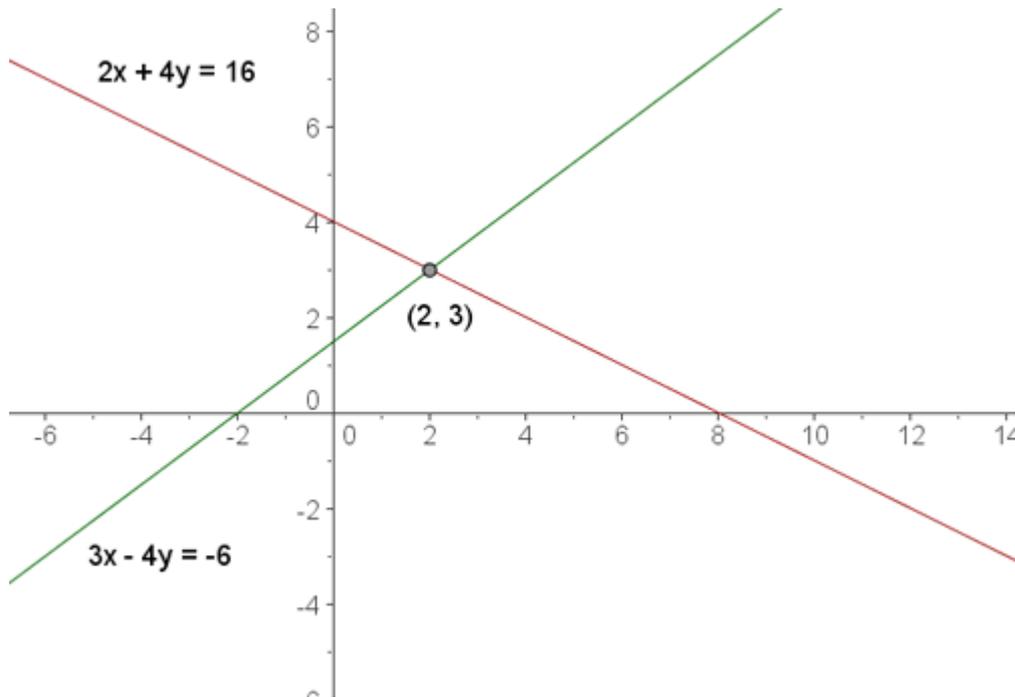
# Clasificación de sistemas de ecuaciones

## Sistema compatible determinado

Tiene una sola solución.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \quad x = 2, y = 3$$

Gráficamente la solución es el punto de corte de las dos rectas.

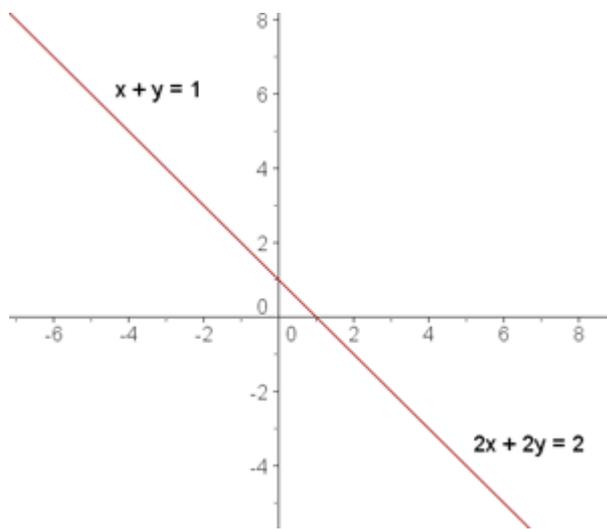


## Sistema compatible indeterminado

El sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$
$$0 = 0$$

Gráficamente obtenemos dos rectas coincidentes. Cualquier punto de la recta es solución.



## Sistema incompatible

**No tiene solución**

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x - 2y = -6 \\ \underline{2x + 2y = 2} \\ 0 = -4 \end{cases}$$

**Gráficamente obtenemos dos rectas paralelas.**

